Tibor Czibere:

Die Kármánsche Ähnlichkeitshypothese für die turbulenten Bewegungen

Tódor Kármán hat im Jahre 1930 in Stockholm auf dem III. internationalen Kongreß der angewandten Mechanik einen Vortrag mit dem Titel *Mechanische Ähnlichkeit* und Turbulenz gehalten [1], wobei er untersuchte, zu welchen Ergebnissen die hydrodynamische Theorie führt, wenn man die Ähnlichkeit der turbulenten Strömungsbilder annimmt, und gleichzeitig die Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit vernachlässigt. Durch Versuche in Rohren wurde nämlich schon bestätigt, daß die von dem maximalen Wert gerechnete Geschwindigkeitsdifferenz einerseits der Quadratwurzel der Wandschubspannung proportional ist, andererseits aber von der Zähigkeit der Flüssigkeit nicht abhängt.

Nach der Hypothese der mechanischen Ähnlichkeit der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen laufen die turbulenten Mischungsvorgänge in unterschiedlichen Strömungen in gleicher Weise ab, wobei sich lediglich Unterschiede in den Längen- und Zeitmaßstäben ergeben; ferner ist die Verteilung der zeitlich gemittelten turbulenten Geschwindigkeit - abgesehen von der direkten Wandnähe von der Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit unabhängig.

Die Folgerungen dieser Ähnlichkeitshypothese wurden von Kármán unter der Annahme eines zweidimensionalen Strömungsfeldes, und von zweidimensionalen Geschwindig-keitsschwankungen abgeleitet, obwohl die turbulenten Vorgänge *in jedem Fall dreidimensionaler Art* sind. Das momentane turbulente Geschwindigkeitsfeld kann als Überlagerung von zwei Geschwindigkeitsfelder betrachtet werden: einerseits das Geschwindigkeitsfeld der zeitlich gemittelten Grundströmung, und andererseits das zeitlich stochastisch schwankende Geschwindigkeitsfeld, dessen zeitlicher Mittelwert Null ist. Für das momentane turbulente Spannungsfeld wird die Gültigkeit des Stokesschen Viskositätsgesetz angenommen, folglich gilt die Navier-Stokessche Bewegungsgleichung für die momentane turbulente Strömung. Im Falle verschwindender Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit drückt der Helmholzsche Wirbelsatz die Erhaltung der momentanen turbulenten Wirbellinien und der Intensitäten von den Wirbelröhren aus.

Wird eine zweidimensionale ebene stationäre Strömung betrachtet, kann eine *skalare Stromfunktion* zur turbulenten Geschwindigkeitsschwankung definiert werden. Der in dem mit der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit gleichmäßig bewegten Koordinatensystem aufgeschriebene Wirbelsatz kann als Bewegungsgleichung der turbulenten Schwankungen in dem *mitbewegten relativen Koordinatensystem* betrachtet werden. Auf Grund der Ähnlich- keitshypothese werden die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen in den beliebigen Punkten der Strömung *in einen gemeinsamen Bildraum* abgebildet. Bekanntlich sind zwei Strömungen ähnlich, wenn ihre Bewegungsgleichungen durch entsprechende Transformationen ineinander oder eine dritte übertragen werden können. Durch diesen Weg ergibt sich eine Differentialgleichung für die dimensionslose Stromfunktion der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen, die *von den in den Punkten der Strömung herrschenden Bewegungseigenschaften unabhängig ist*. Dafür muß die Bedingung erfüllt sein, daß die drei Koeffizienten in der transformierten Gleichung der Stromfunktion übereinstimmen. Aus dieser Bedingung folgen zwei Formeln: die eine für den Längenmaßstab und die andere für die Koeffizienten zur Umrechnung der Stromfunktion der Geschwindigkeitsschwankung vom Bildraum in das Koordinatensystem der Strömung. Da die für die dimensionslose Stromfunktion im Bildraum erhaltene Differentialgleichung von den örtlichen Strömungscharaktern wirklich unabhängig ist, kann sie *als Bestätigung der mechanischen Ähnlichkeit der turbulenten Bewegungsbilder* in beliebigen Punkten der Strömung betrachtet werden.

Durch Umkehren dieser Transformation kann die Formel der scheinbaren turbulenten Schubspannung aus der dimensionslosen Stromfunktion abgeleitet werden. Die in dem Ursprung des mitbewegten Koordinatensystems auftretenden Größen der partiellen Ableitungen der Stromfunktion liefern die *Kármán-Konstante*. Endlich ergibt sich der wohl- bekannte Zusammenhang zwischen der turbulenten Schubspannung und des in senkrechter Richtung genommenen Geschwindigkeitsgradienten, *der zuerst von Prandtl 1925 angegeben wurde*. Die für den Längenmaßstab erhaltene Formel ist aber nur beschränkt gültig; sie versagt, wenn die Verteilung der gemittelten Geschwindigkeit eine Wendepunkt besitzt.

Im folgenden wird gezeigt, daß die Kármánsche Ählichkeitshypothese auch bei dreidimensionalen Geschwindigkeitsschwankungen angewandt werden kann, wenn man anstelle der skalaren und stationären Stromfunktion ein auch von der Zeit abhängiges *Vektorpotential* einführt.

Betrachten wir die dreidimensionale Grenzschichtströmung in einem *krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem*, wobei die Wandoberfläche eine Koordinatenebene ist. Wir können zu diesem ein anderes Koordinatensystem zuordnen, das die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit und deren Rotation so bestimmen, daß eine der drei Koordinatenrichtungen immer der Richtung des Wirbelvektors entgegengesetzt ist, der andere steht senkrecht auf den Ebenen der Geschwindigkeit und des Wirbelvektors, und die dritte ergibt sich als Vektor- produkt dieser beiden. Dieses System kann als ein *natürliches Koordinatensystem der Grenzschichtströmung* bezeichnet werden. Auf Grund der Ähnlichkeitshypothese werden die Geschwindigkeitsschwankungen in einem beliebigen Punkt der Strömung wieder in den gemeinsamen Bildraum transformiert, dessen Koordinatenrichtungen zu denen des mitbewegten natürlichen Koordinatensystems parallel sind.

Nach der zeitlichen Mittelung der Bewegungs- und der Wirbelgleichung der momentanen turbulenten Strömung ergeben sich die für die gemittelte Strömung gültigen Gleichungen. Wenn das Kraftfeld ein Potential hat, und das bewegte Medium barotrop ist, dann ergibt sich für das gemittelte Wirbelfeld der Wirbelsatz, wonach die Wirbellinien der gemittelten Strömung auch im Falle verschwindender Zähigkeit nicht erhalten bleiben, sondern in die Umgebung diffundieren. Dieser Wirbelsatz ist auch in dem mitbewegten relativen Koordinatensystem gültig, so erhält man den Wirbelsatz des schwankenden Geschwindigkeitsfeldes, der als Bewegungsgleichung der turbulenten Schwankungen in dem mitbewegten natürlichen Koordinatensystem betrachtet werden kann.

Wird nun anstelle der skalaren Stromfunktion ein quellenloses *Vektorpotential* eingeführt, dessen Rotation die Geschwindigkeitschwankung determiniert, so ergibt sich aus dem Wirbelsatz des schwankenden Geschwindigkeitsfeldes die Differentialgleichung des Vektorpotentials in dem mitbewegten relativen Koordinatensystem, die auf Grund der Ähnlichkeitshypothese - wie im zweidimensionalen Falle - von dem mitbewegten natürlichen Koordinatensystem in den Bildraum transformiert wird. Dabei sind nicht nur die geometrischen Daten und das Vektorpotential, sondern *auch die Zeit* zu transformieren; denn die Zeit-Abhängigkeit der turbulenten Schwankungen ist auf jeden Fall in Betracht zu nehmen.

Nach der Transformation ergibt sich die Differentialgleichung für das dimensionslose Vektorpotential der turbulenten Geschwindigkeitsschwankung, die *von den in den Punkten der Strömung herrschenden Bewegungseigenschaften unabhängig ist*. Dafür muß auch in diesem Fall die Bedingung erfüllt sein, daß die drei Koeffizienten in der transformierten Gleichung des dimensionslosen Vektorpotentials übereinstimmen. Daraus folgen zwei Gleichungen für die drei Maßstäbe (Längen-, Zeit- und Vektorpotential-Maßstäbe), was jetzt bedeutet, daß einer von diesen frei gewählt werden kann. Einer von den drei Maßstäben ist also aus dem Gesichtspunkt der mechanischen Ähnlichkeit beliebig, dessen Wert durch andere physikalische Umstände zu bestimmen ist.

Die Lösung der für das dimensionslose Vektorpotential erhaltenen Differentialgleichung wird in Form von trigonometrischen Reihen gesucht, deren Glieder Funktionen der Zeit und des Ortes sind. Diese trigonometrischen Funktionen haben zufällige Amplituden und zufällige Phasenwinkel, die in je einem vorgegebenen Intervall gleichmäßig verteilte Wahrscheinlichkeitsveränderliche sind. Je drei

Phasenwinkel zu einem Reihen-Index bilden eine räumliche Richtung, folglich können nur zwei Werte aus dem Tripel von Phasenwinkel-Komponenten frei gewählt werden. So erhalten wir ein Vektorfeld in dem Bildraum der Turbulenz, das durch einen stochastischen Prozeß mit fünf unabhängigen Wahrscheinlichkeitsveränderlichen generiert wird. Dieses Vektorfeld im Bildraum der Turbulenz entspricht dem Schwankungsmechanismus der turbulenten Strömung.

Da der Ursprung des Bildraumes der Turbulenz einem beliebigen Punkt des Strömungsraumes entspricht, ist der Wert der dimensionslosen Geschwindigkeitsschwankung bei diesem Punkt zu nehmen, und dann in das natürliche Koordinatensystem zu transformieren. Bekanntlich liefern die zeitlichen Mittelwerte von den paarweisen Produkten der Komponenten der Geschwindigkeitsschwankung die skalaren Elemente des Reynoldsschen turbulenten Spannungstensors. Endlich kann der Reynoldssche Spannungstensor im natürlichen Koordinatensystem als Produkt der dominanten Schubspannung und des sog. Ähnlichkeits-tensors aufgeschrieben werden. Die Berechnung der turbulenten Strömung wird im allgemeinen nicht im natürlichen Koordinatensystem durchgeführt, deshalb ist der Reynoldssche Spannungstensor in das aktuelle Koordinatensystem zu transformieren.

Die Kármánsche Ähnlichkeitshypothese kann also auch im Falle von dreidimensionalen Geschwindigkeitsschwankungen angewandt werden, wenn man anstell der skalaren Strom-funktion ein Vektorpotential für die turbulenten Geschwindigkeitsschwankung einführt. Die für das dimensionslose Vektorpotential erhaltene Differentialgleichung ist im Bildraum der Turbulenz von den örtlichen Strömungscharaktern unabhängig, was im Fall von räumlichen Geschwindigkeitsschwankungen die mechanische Ähnlichkeit der Bewegungsbilder in beliebigen Punkten der turbulenten Strömung ausdrückt. Es wurde nachgewiesen, daß einerseits ein bewegtes natürliches Koordinatensystem - dessen Basisrichtungen die turbulente Mittelgeschwindigkeit und deren Wirbelvektor bestimmen - zum Geschwindigkeitsfeld der turbulenten Schwankungsbewegung zugeordnet werden kann, andererseits kann ein dimensionsloses Vektorpotential definiert werden, dessen Skalarkomponenten durch Reihen von Kosinus- bzw. Sinuswellen mit zufälligen Amplituden und Phasenwinkeln gebildet werden. Mit Hilfe dieses Vektorpotentials wurde ein dreidimensionales Turbulenzmodell ausgelegt, wobei der innere Mechanismus der Turbulenz durch einen stochastischen Prozeß mit fünf unnabhängigen Wahrscheinlichkeitsveränderlichen repräsentiert wird.

[1] KÁRMÁN, Th. v.: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Proc. 3rd. Congress of Applied Mechanics Stockholm (1930) pp. 85-93.

Tibor Czibere,
Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Professor emiritus
Universität Miskolc, Lehrstuhl für Strömungs- und Wärmetechnische Maschinen